

## TITOLO ESPERIENZA: POLIMINI

FIGURE COMPOSTE DALL'UNIONE DI QUADRATI PER APPROFONDIRE IN MODO PRATICO E GIOCOLO TEMI COME L'EQUIVALENZA DELLE FIGURE PIANE, L'ISOPERIMETRIA, LE ISOMETRIE CHE PORTANO A FAR COINCIDERE LE FIGURE PIANE

Un semplice foglio a quadretti è il punto di partenza per scoprire un universo di figure davvero ricco dalle quali si possono ricavare molti giochi divertenti e numerosi rompicapo. Risultano ancora più interessanti per l'insegnante che può proporre attività di geometria che amiamo definire "geometrica", basata cioè unicamente sullo studio e sull'applicazione di proprietà delle figure, quasi priva di numeri e priva potremo dire, di formule. Un foglio come quello che aveva davanti a sé Solomon W. Golomb, nel 1953 quando, giovane studente di Harvard, per superare la noia di una lezione poco interessante, incominciò a tracciare una serie di figure che avevano il quadretto come punto di partenza. Da bravo matematico, tentò poi di classificarle, cercando di stabilire quante figure diverse fosse possibile costruire con un quadretto, con due, tre, quattro quadretti e così via, stabilendo però una regola precisa: i quadretti che componevano le varie figure dovevano avere almeno un lato in comune e si dovevano considerare equivalenti tutte quelle che potevano essere sovrapposte con un movimento qualsiasi. Golomb chiamò polimini le figure così ottenute. In particolare, battezzò monomino il quadretto base, duomino l'unica figura che si può costruire con due quadretti, trimini quelle formate da tre quadretti, tetramini quelle di quattro quadretti, pentamini di cinque e così via, sempre tenendo presente la regola che i quadretti devono avere almeno un lato in comune e che si devono escludere le figure che attraverso operazioni di rotazione o ribaltamento possono essere sovrapposte esattamente.

Nuclei coinvolti	Competenze	Contenuti	Collegamenti esterni
lo spazio e le figure	individuare figure, riconoscere figure congruenti  eseguire le isometrie necessarie per far coincidere due figure piane  valutare perimetri e aree di figure composte	proprietà delle figure piane  isoperimetria e equiestensione  isometrie e loro composizione	nessuno: è una attività interna alla matematica
Nuclei coinvolti	Competenze coinvolte		
porsi e risolvere problemi	produrre congetture e verificarle		

**Metodologia:** la classe viene suddivisa in gruppi di quattro alunni che operano senza differenziazione dei ruoli collaborando e partecipando reciprocamente

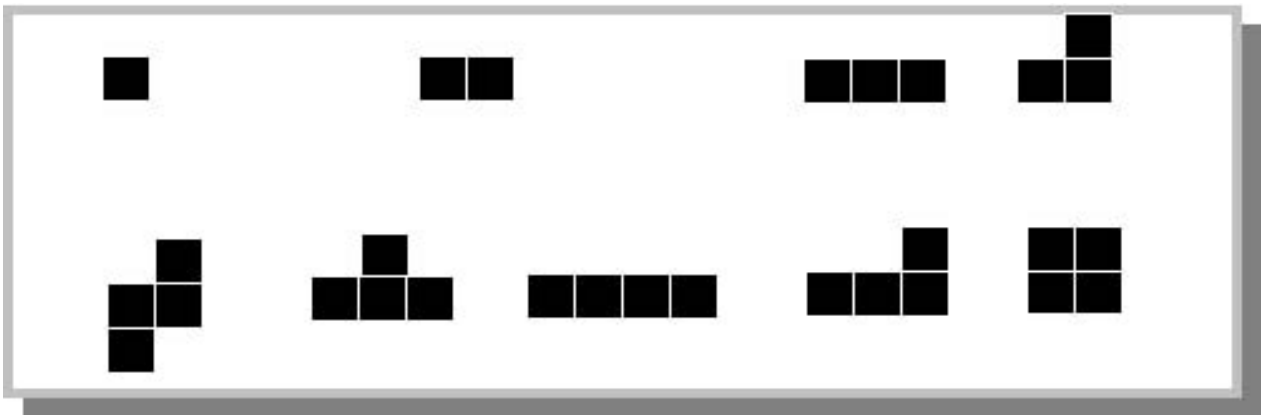
**Materiali:** blocchetti di bigliettini quadrati per note (Post-it: attenzione se ne trovano di rettangolari ma a noi servono rigorosamente quadrati!), carta quadrettata o semplici fogli di quaderno a quadretti, cartelloni o fogli grandi, pennarelli di diverso colore.

**Tempi:** 8 ore se alle varie fasi segue la richiesta di produrre cartelloni o altro materiale illustrativo.

### Fase 1

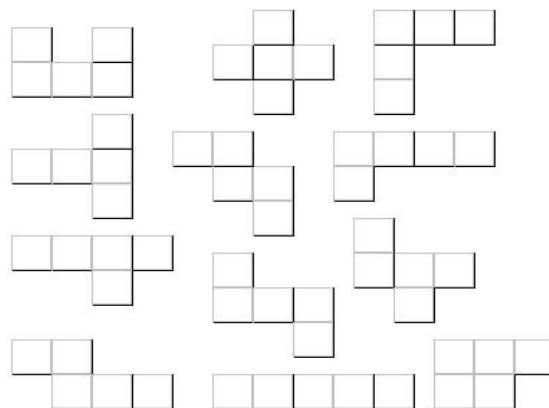
#### Individuazione dei polimini: descrizione dell'attività

L'attività inizia con la distribuzione del materiale: i blocchetti di bigliettini, i cartelloni, la carta quadrettata. Gli alunni vengono invitati a realizzare i polimini seguendo la regola generale che due quadrati adiacenti devono avere un lato in comune senza generare sovrapposizioni. In questa fase del lavoro sicuramente sorge il problema di quando due polimini, per esempio due pentamini debbano essere ritenuti uguali. Si osservano infatti spesso figure che si differenziano per una rotazione e/o un ribaltamento. Si può suggerire di considerare uguali tutti i polimini che attraverso operazioni di rotazione o ribaltamento possono essere sovrapposti esattamente. Le prime figure sono molto semplici da ottenere. Successivamente però la loro individuazione si fa sempre più problematica e sorgono spesso discussioni accese. Basti pensare a come cresce il numero di combinazioni possibili all'aumentare del numero di quadratini impiegati per formare ciascuna figura. Il monomino è unico, il duomino è unico, i trimini sono 2, i quadrimini 5, i pentamini dodici, gli esamini 35<sup>1</sup>.



Il monomino, il duomino i due trimini e i cinque tetramini

E' molto importante che nelle fasi della ricerca l'insegnante suggerisca l'uso di strategie particolari per individuare le varie forme. Ad esempio per gli esamini si possono considerare prima tutte le figure ottenibili con una fila da sei quadratini (in questo caso è unica, una sola fila da sei) poi con cinque (3), con quattro (13), con tre (17) infine con due (1). L'attività cessa allo scadere del tempo prefissato dall'insegnante.



I dodici pentamini

## Fase 2

### Polimini isoperimetrici

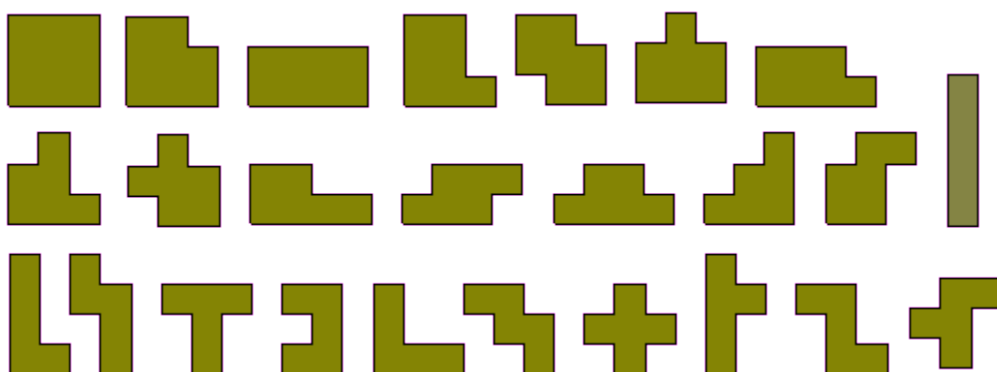
<sup>1</sup>Ci accontenteremo di informare agli alunni che gli eptamini sono 108, gli ottomini 369, i polimini formati da 9 quadrati 1285, quelli formati da dieci quadrati 4655, 17073 quelli con 11, 63600 quelli con 12 e così via.

Figure che hanno la stessa area sono necessariamente isoperimetriche? A partire da questo quesito può iniziare la seconda fase del laboratorio, dedicata alla ricerca dei polimini isoperimetrici. I gruppi di alunni vengono invitati a misurare i perimetri dei polimini individuati e a scoprire che polimini equivalenti possono avere perimetri diversi. L'attività può consistere in una specie di gara tra i gruppi che al termine dell'attività presenteranno i risultati dell'indagine effettuata: gruppi di polimini aventi uguale perimetro (e ovviamente in alcuni casi area diversa).



I polimini di perimetro 4, 6, 8 e 10

Monomino di perimetro quattro, duomino di perimetro 6, due trimini e un tetramino di perimetro 8, un esamino, un pentamino e quattro tetramini di perimetro dieci.

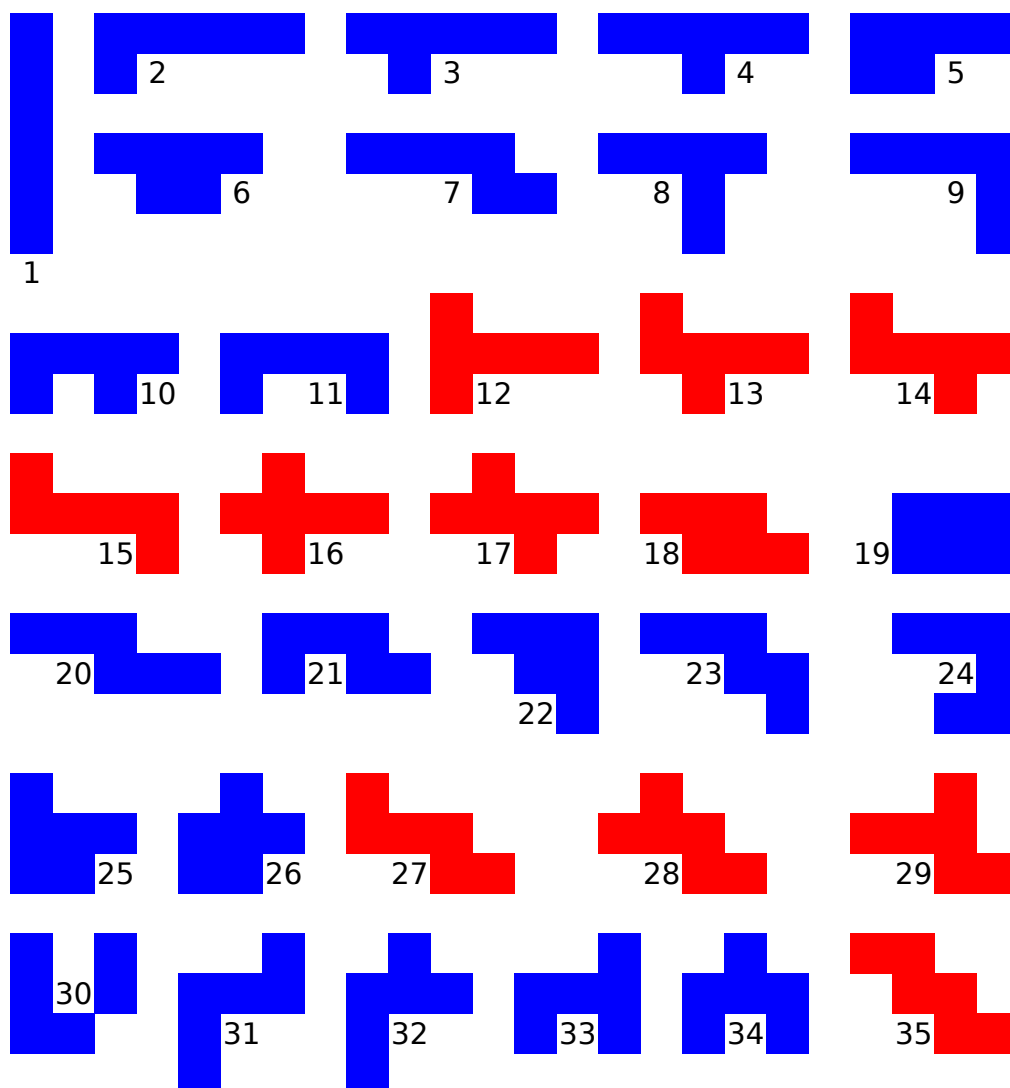


I 25 polimini con perimetro 12

### Fase 3

#### Gli esamini e gli sviluppi del cubo

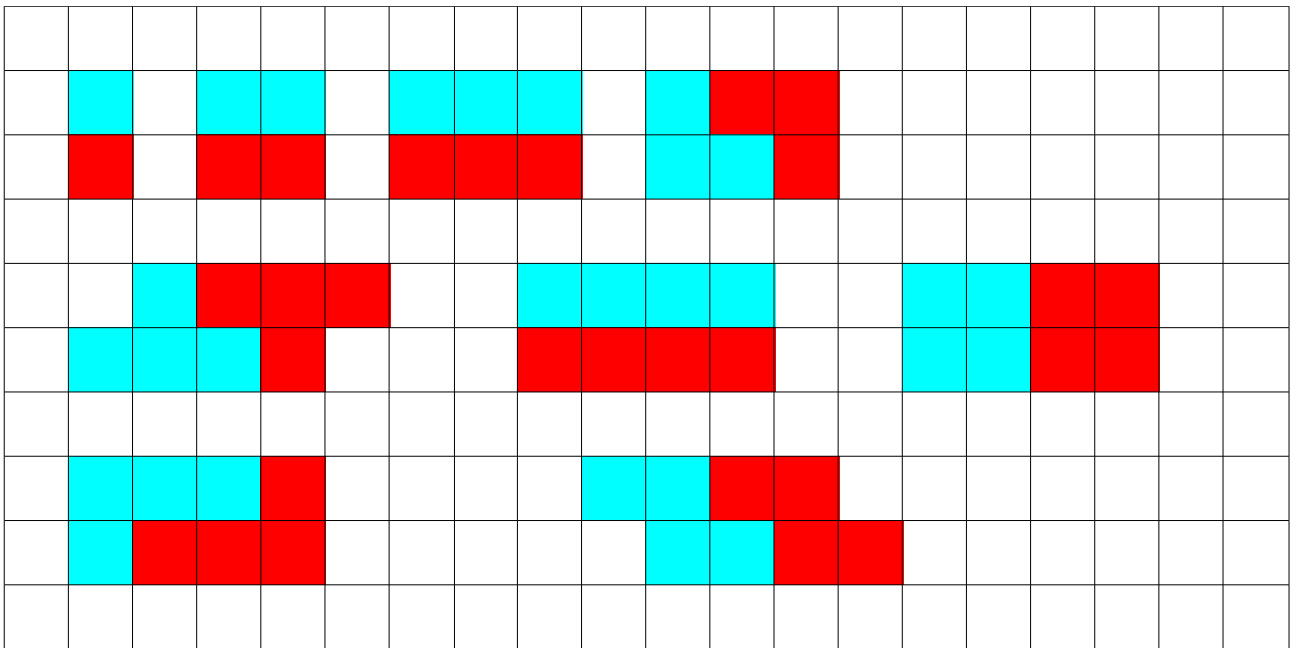
Passaggi dalla geometria piana alla geometria solida sono molto utili e vengono spesso consigliati nella didattica della geometria. In particolare modo analizzeremo in questa sezione come alcuni esamini rappresentano sviluppi del cubo. Ci si può domandare quali polimini ritagliati e piegati possono essere utilizzati per costruire questo solido. L'esercizio prevede quindi l'individuazione degli esamini, la loro rappresentazione su carta quadrettata e di ritagliarli eventualmente, qualora risultasse utile, per verificare quali di essi rappresentano i cosiddetti "sviluppi veri" del cubo. Gli esamini sono 35. 11 di essi sono sviluppi del cubo.



Gli esami rossi (quelli più chiari in bianco e nero) sono gli sviluppi del cubo. I blu (più scuri in bianco e nero) anche se formati da sei quadrati non sono sviluppi del cubo.

fase 4

I polimini possono saturare il piano? Si può aprire un altro divertente campo di indagine studiando la saturazione del piano, cioè la sua copertura senza sovrapposizioni o buchi, usando come piastrelle i polimini equivalenti. Non ci sono difficoltà con i monomini, duomini, trimini o tetramini, ma ci sono già tre pentamini che per saturare il piano devono essere accoppiati necessariamente con altri pentamini equivalenti ruotati di  $180^\circ$  rispetto al pentamino di partenza. Anche alcuni degli esami devono essere accoppiati con altri congruenti ruotati di  $180^\circ$ , ma le cose si complicano già con gli eptamini, con quattro dei quali non è assolutamente possibile saturare il piano.

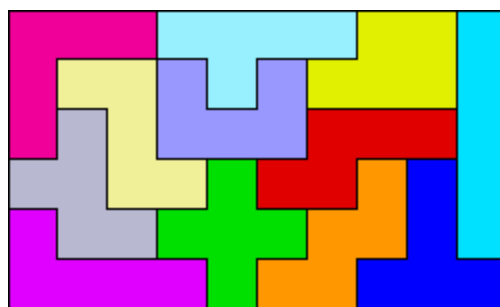


Pavimentazioni che saturano il piano sono facilmente ottenibili con monomini, duomini, trimini e tetramini. In questa fase si può scegliere di operare con fogli di carta quadrettata e pennarelli, molto comodi per la ricerca delle soluzioni che tassellano il piano.

### Note informative per l'insegnante

Non si conosce ancora la legge che collega il numero di quadrati di partenza al numero dei polimini corrispondenti. Questo gioco inoltre appare soltanto all'inizio e sono prevedibili altri sviluppi. Si possono infatti immaginare altre situazioni parallele dove al posto dei quadratini ci sono altre figure come il triangolo equilatero, l'esagono regolare o altre che possono generare interessanti strutture, simili a quelle che abbiamo considerato.

La fama dei polimini è legata al numero straordinario di giochi collegati ad essi. Basti pensare all'uso dei pentamini "rettangolabili" di cui esistono migliaia, o forse più soluzioni diverse (che si prestano cioè ad essere assemblati in varie figure rettangolari). Alcuni rettangoli presentano poche o pochissime soluzioni e sono difficilissimi da eseguire altri invece come detto sopra, ne offrono moltissime anche se richiedono per essere risolti molto spesso alcune decine di minuti di lavoro. Si possono scaricare da internet software che generano scacchiere su cui giocare con i polimini. Esistono polimini solidi utilizzabili per rompicapo ad incastro e molto altro. Questi giochi però per quanto divertenti non vengono descritti in questa sede data la limitata fruibilità didattica.



Rettangolo 6x10 costruito con i dodici pentamini. Ci sono 2339 modi diversi di mettere i dodici pentamini in una simile forma (Livio Zucca).

### **Elementi per prove di verifica**

Alleghiamo (ultimi due fogli )un esempio di prova di verifica da sottoporre al termine dell'attività

### **Sitografia**

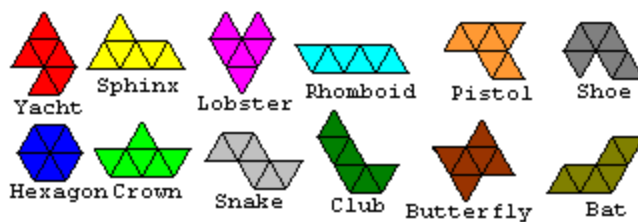
Irrrinunciabili su questi argomenti due siti, il primo con nota storica e altri indirizzi per approfondimento il secondo, quello di Livio Zucca, ricchissimo di materiali di ogni tipo per la didattica della geometria e davvero bello per le scelte grafiche, le modalità di presentazione, i testi accattivanti e gli approfondimenti teorici.

<http://www2.polito.it/didattica/polymath/htmlS/probegio/GAMEMATH/Polimini/Polimini.htm>

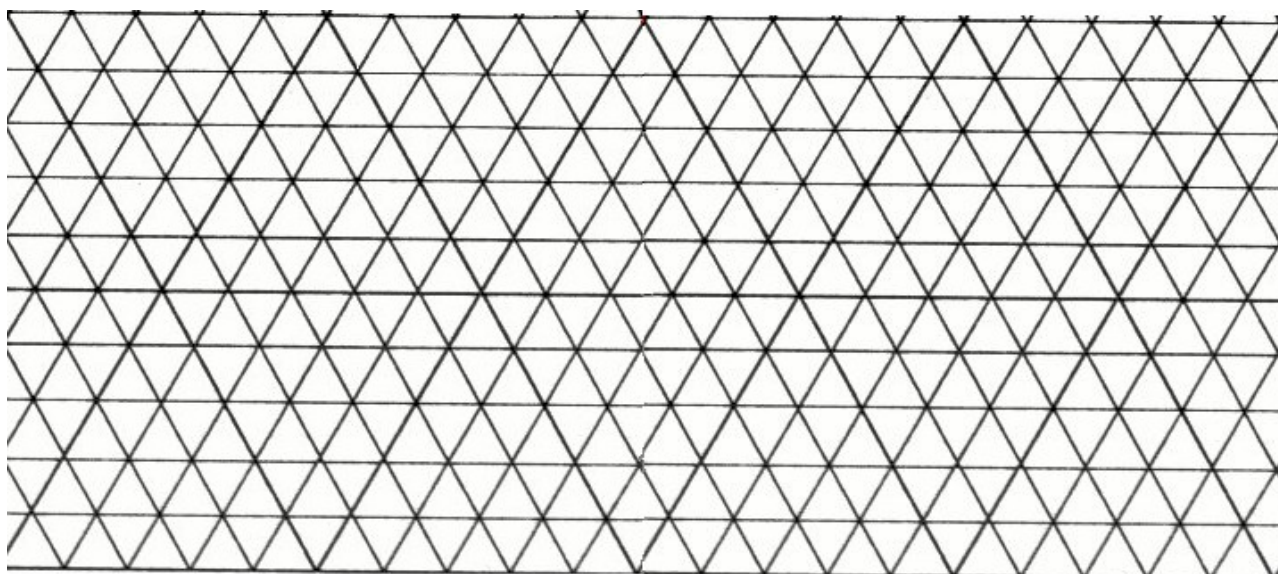
<http://www.geocities.com/liviozuc/>

Cognome: ..... Nome: ..... Classe: ..... Sezione .....

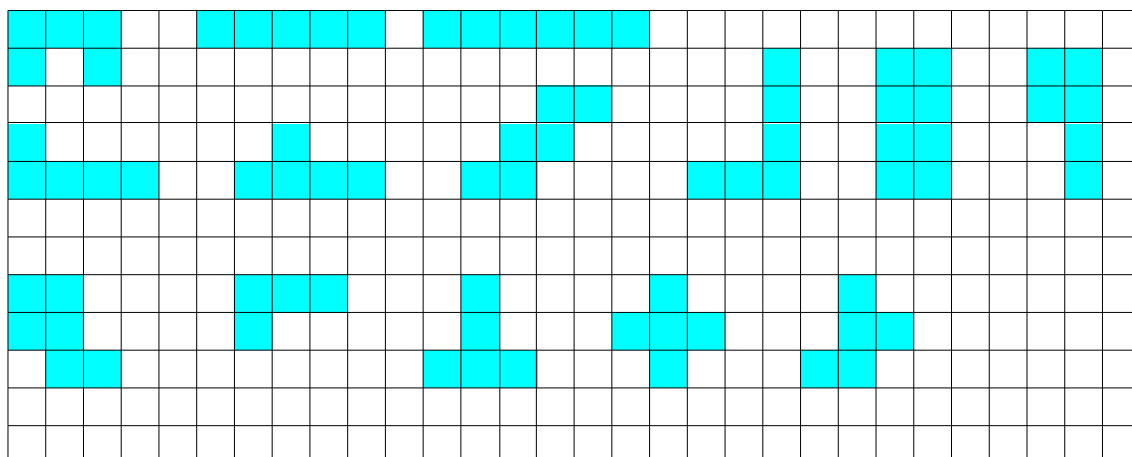
### verifica di geometria: i polimini



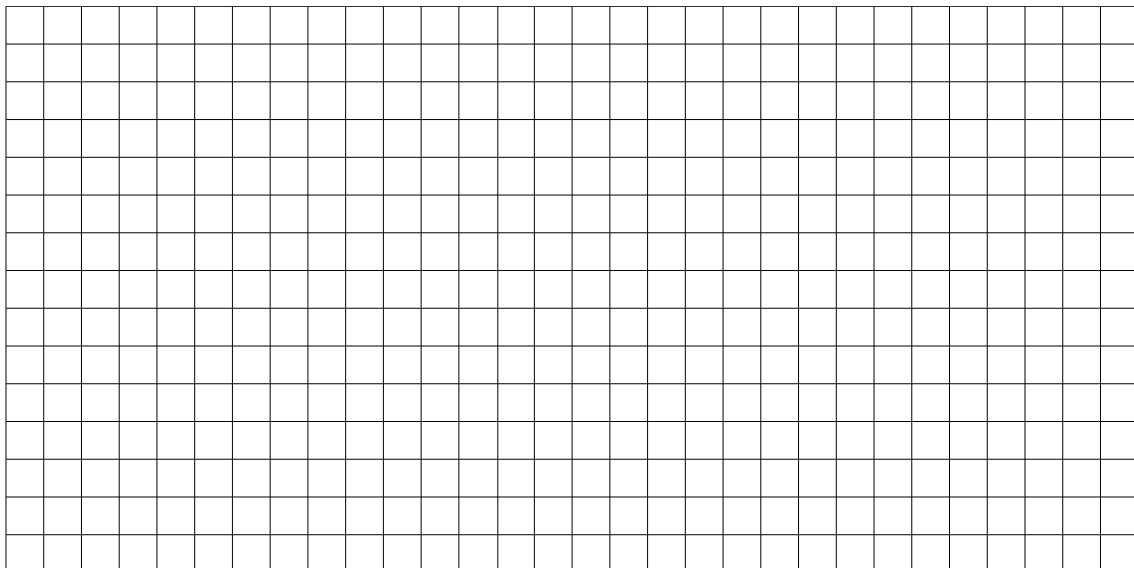
a) Osserva l'immagine sotto il titolo. Presenta le figure ottenibili unendo sei triangoli equilateri secondo le regole utilizzate per la costruzione dei polimini. Utilizza la "griglia" isometrica sottostante per individuare le figure composte di uno, due, tre, quattro, cinque triangolini.



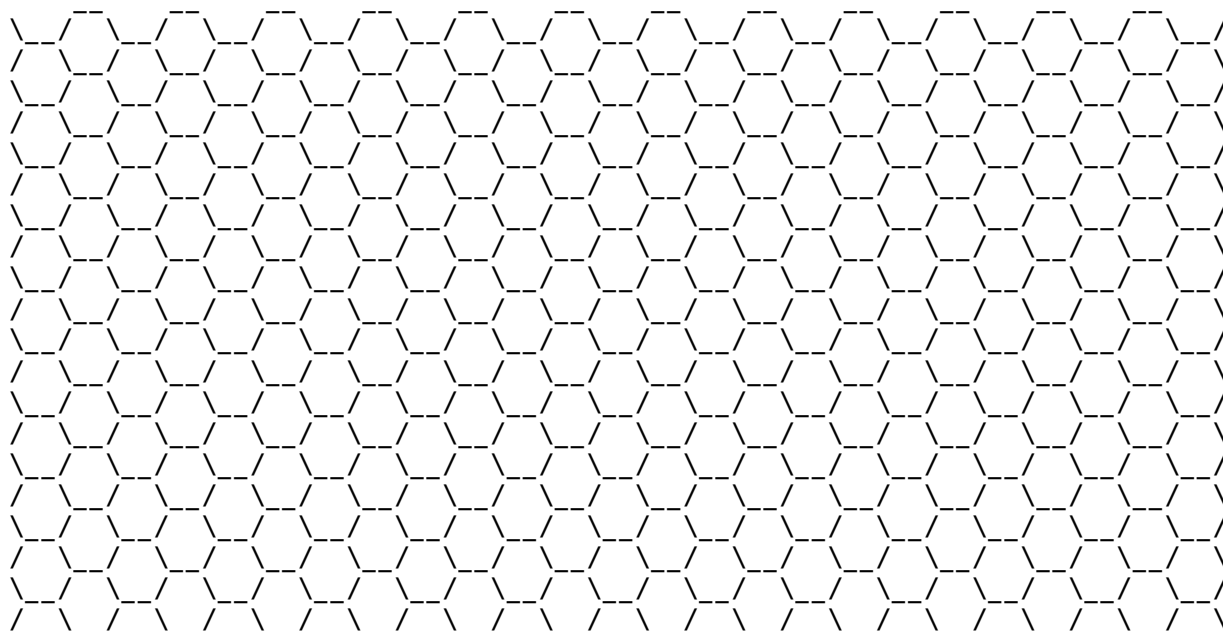
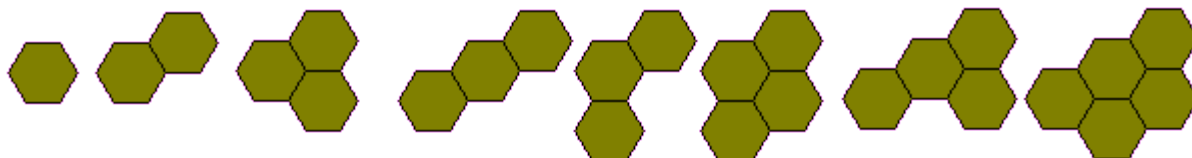
b) Indica accanto o sotto a ciascun polimino il suo perimetro



- c) Nell'esercizio sopra (il b) hai potuto verificare che alcuni esamini hanno perimetro uguale a 12. Prova ad individuare altri esamini con perimetro 12 e disegnali nella quadrettatura sottostante.



- d) Le figure composte da esagoni costruite seguendo le regole per la costruzione dei polimini vengono definite polixi. Per esempio le figure sottostanti sono polixi. Secondo te, quelli rappresentati nella figura sottostante possono essere utilizzati come piastrelle? Riempiono il piano senza lasciare parti vuote? Giustifica le tue risposte con dei disegni.





e) I polimini congruenti: osserva il pentamini sottostanti; a partire da uno, abbiamo ottenuto gli altri mediante rotazioni e ribaltamenti. Sapresti procedere allo stesso modo su un foglio a quadretti con gli altri pentamini ottenendo individuando tutte le combinazioni possibili?

